Prosti brojevi

Prirodan broj p > 1 je **prost** ako je deljiv samo brojem 1 i sa samim sobom.

Brojevi veći od 1 koji nisu prosti su **složeni**.

Po dogovoru 1 se ne uzima ni da je prost niti složen broj.

Prvih nekoliko prostih brojeva su 2,3,5,7,11,13,17,...(deljivi samo sa 1 i sa sobom)

Složeni su 4 (deljiv i sa 2 osim sa 1 i sa sobom), 6 (deljiv sa 2 , sa 3 osim sa 1 i sa sobom)...itd.

Evo nekoliko teoremica (bez dokaza) koje nam mogu pomoći u rađenju zadataka:

T.1. Svaki ceo broj veći od 1 ima bar jedan prost delilac.

T.2. Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva

T.3. Ako prost broj deli proizvod više činilaca, on deli bar jedan od tih činilaca

T.4. Svaki složeni broj n se na jedinstven način može rastaviti na činioce.

$$n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s$$

Ako se u razlaganju neki činioci ponavljaju, onda je taj zapis:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

Broj svih delilaca broja n je onda (čita se tau od n)

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_s + 1)$$

Evo jednog **primera:** Broj 630 rastavi na činioce i odredi koliko ima različitih delilaca.

Najpre broj poznatim postupkom rastavimo na proste činioce.

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Možemo zapisati: $630 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

Koliko će on imati različitih delilaca?

(1+1)(2+1)(1+1)(1+1)= 24

To su:

1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 14 | 15 | 18 | 21 | 30 | 35 |
42 | 45 | 63 | 70 | 90 | 105 | 126 | 210 | 315 | 630

Primer 1.

Odrediti najmanji prirodni broj koji je deljiv sa 30 a ima tačno 12 delilaca.

Rešenje:

Pošto je 30 = 2•3•5 , traženi broj n je deljiv sa brojevima 2 , 3 i 5 (po T.3.)

Faktorizacija traženog broja sadrži samo ova tri broja jer bi u suprotnom broj delilaca bio veći od 12. Recimo $n = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot k^1$, onda je

$\tau(n) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16,$

Neka je recimo $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. Mora biti (a+1)(b+1)(c+1)=12 i važi 12 = 2•2•3

Tražimo najmanji takav broj , pa zaključujemo da je to $n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$

Primer 2.

Svaki prost broj veći od 3 ima oblik 6k+1 ili 6k + 5. Dokazati.

Rešenje:

Sve prirodne brojeve možemo opisati sa:

n = 6k (deljivi su sa 6)

n = 6k+1 (pri deljenju sa 6 daju ostatak 1)

n = 6k+2 (pri deljenju sa 6 daju ostatak 2)

n = 6k+3 (pri deljenju sa 6 daju ostatak 3)

n = 6k+4 (pri deljenju sa 6 daju ostatak 4)

n = 6k+5 (pri deljenju sa 6 daju ostatak 5)

Brojevi n=6k, n=6k+2=2(3k+1), n=6k+3=3(2k+1) i n=6k+4=2(3k+2) su očigledno složeni pa zaključujemo da prosti brojevi veći od tri imaju oblik n = 6k+1 ili n = 6k+5.

Primer 3.

Kvadrat prostog broja većeg od 3 ima oblik 12n+1. Dokazati.

Rešenje:

Iskoristićemo prethodni zadatak, da svaki prost broj veći od 3 ima oblik 6k+1 ili 6k + 5.

$(6k+1)^2 = 36k^2+12k+1=12k(3k+1)+1 =12n+1$ ako obeležimo $k(3k+1)=n$

$(6k+5)^2 = 36k^2+60k+25=36k^2+60k+24+1=12(3k^2+5k+2)+1=12n+1$ ako obeležimo da je $3k^2+5k+2=n$

Primer 4.

Odrediti sve proste brojeve p, takve da su brojevi p+10 i p+20 takođe prosti.

Rešenje:

Ako probamo p = 2 (prvi prost broj) broj 2+10=12 je složen.

Ako probamo p = 3 imamo 3+10=13 i 3+20=23 su prosti.

Ispitajmo šta se dešava za brojeve oblika 3k+1 i 3k+2.(Na taj način opisujemo sve brojeve)

Za p=3k+1 imamo

p+10=3k+1+10=3k+11

p+20=3k+1+20=3k+21=3(k+7) složen

Za p=3k+2 imamo

p+10=3k+2+10=3k+12=3(k+4) složen

Jedino rešenje je p=3.

Primer 5.

Prost broj p>2 je razlika kvadrata dva prirodna broja. Dokazati.

Rešenje:

Neka su x i y prirodni brojevi.

$x^2-y^2 = p$

$(x-y)(x+y) = p\bullet 1$ Odavde mora biti

$x+ y = p$

$\underline{x -y = 1}$ saberemo ove dve jednačine

$2x=p+1$ pa je $x = \frac{p+1}{2}$

Odavde je $y = \frac{p-1}{2}$